

Estudio del Cono de Hooke

Arturo Pérez Roncero

December 2021

Índice

1. Introducción	3
2. Obtención Ecuaciones de Movimiento	3
2.1. Coordenadas Esféricas	3
2.2. Coordenadas Cilíndricas	3
2.3. Discusión	3
3. Diferencias con los Astros	4
3.1. Dimensiones	4
3.2. Tipos de potenciales	4
3.3. Precesiones	6
4. Anexos	8

1. Introducción

El estudio del cono de Hooke tiene gran valor científico como analogía del movimiento de los planetas. Este consiste en un cono de ángulo θ sobre el que se dejan deslizar bolitas. El movimiento de estas bolas consiste en vaivenes que recuerdan a las órbitas de los planetas. Sin embargo, existen claras distinciones entre ambos fenómenos, algo que se explorará en este trabajo.

2. Obtención Ecuaciones de Movimiento

2.1. Coordenadas Esféricas

Recordamos las transformaciones a coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \\y &= r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\z &= r \cos \theta \\ \theta &= \text{cte}\end{aligned}\tag{1}$$

El lagrangiano del sistema se transforma entonces a:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\varphi}^2) - mgr \cos \theta\tag{2}$$

Las ecuaciones de Lagrange-Euler serán entonces:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= J\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{J}{mr^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \\ \ddot{r} &= r \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\varphi}^2 - g \cos \theta\end{aligned}\tag{4}$$

El lagrangiano no depende del tiempo, y tampoco lo hace las ligaduras, resultando en una ecuación más, correspondiente a la conservación de la energía del sistema. Al tener menor número de grados de libertad que de ecuaciones de movimiento, el sistema es integrable de Liouville.

2.2. Coordenadas Cilíndricas

Recordamos las transformaciones a coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \theta \\y &= \rho \operatorname{sen} \theta \\z &= \rho \tan(\alpha) = \rho c\end{aligned}\tag{5}$$

El lagrangiano del sistema se transforma entonces a:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz\tag{6}$$

Las ecuaciones de Lagrange-Euler serán entonces:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{J}{m\rho^2} \\ \ddot{\rho} &= \rho \dot{\varphi}^2 - gc\end{aligned}\tag{7}$$

En este caso el sistema también es integrable de Liouville.

2.3. Discusión

Es apreciable que las ecuaciones de movimiento en coordenadas cilíndricas se corresponden a la proyección sobre el plano de las ecuaciones en esféricas. En un principio cabría esperar que las ecuaciones en esféricas resultasen más sencillas de obtener, dado que uno de los grados de libertad, θ , permanece constante al tratarse de un cono. Sin embargo, no solo se obtuvieron el mismo número de ecuaciones de movimiento, sino que además las ecuaciones en cilíndricas resultaron ser expresiones más sencillas de analizar.

3. Diferencias con los Astros

3.1. Dimensiones

La primera diferencia entre el cono de Hooke y el movimiento de los astros radica en el número de grados de libertad de los sistemas. Esto puede parecer una obviedad, pero es interesante explorar la relación entre las analogías gravitatorias y su falta de dimensiones. En la mayoría de museos de ciencias naturales existen grandes superficies con forma de remolino sobre el que se pueden dejar caer canicas para simular el movimiento de los planetas, un concepto muy similar al cono de Hooke, excepto por una diferencia: la forma.

Con tal de recrear el equivalente a una fuerza atractiva entre las canicas y el centro de la superficie, ambos montajes inclinan su superficie para proyectar parte de la fuerza atractiva de la Tierra en la dirección adecuada. En el caso de los montajes en museos, el módulo de esta proyección varía con el radio, aumentando en torno al centro, mientras que en el cono de Hooke el módulo de mantiene constante.

Es decir, ambos experimentos requieren 3 dimensiones para recrear un sistema de 2 dimensiones, utilizando esta dimensión extra para controlar la fuerza y la dirección de la gravedad. En el caso del cono de Hooke, se tiene el equivalente a un sistema gravitatorio bidimensional con fuerzas atractivas constantes.

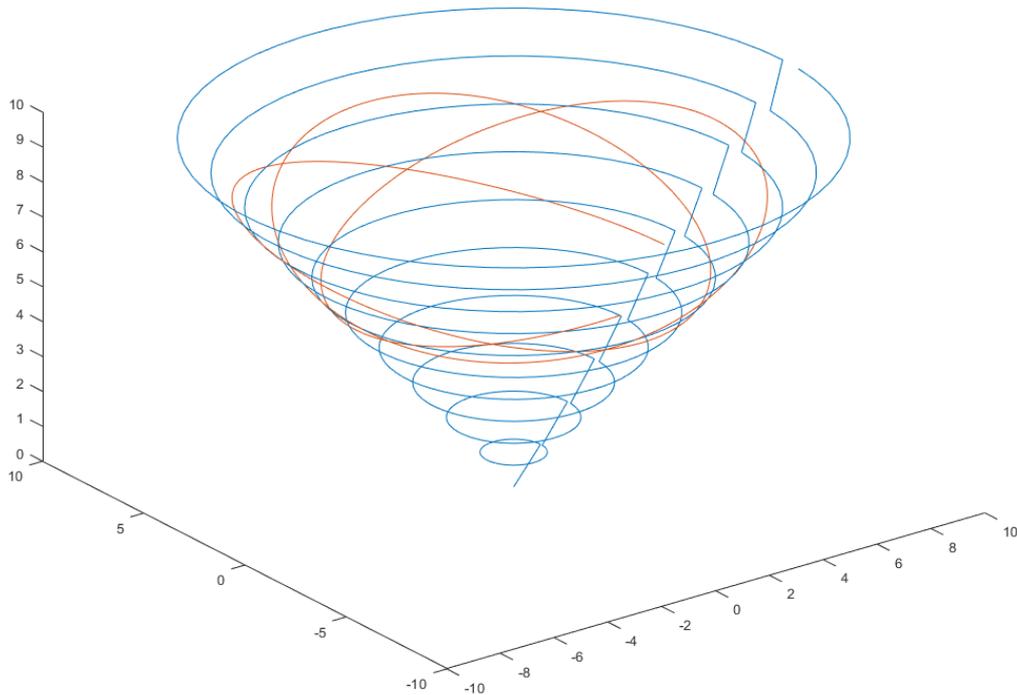


Figura 1: Órbita de una canica en un cono.

3.2. Tipos de potenciales

La fuerza de la gravedad es una fuerza central conservativa que depende del gradiente de un potencial. La naturaleza de este gradiente ha sido objeto de gran interés para la ciencia, y su forma ha variado notablemente con el tiempo.

$$U(r) = -k/r \quad (8)$$

El potencial de Kepler, en el seno de la Teoría de la Gravitación Universal, depende de forma inversamente lineal de la distancia, y da lugar a órbitas cónicas, como elipses, parábolas o hipérbolas. Con tal

de explicar la precesión de Mercurio, Cotes introdujo un potencial que dependía del cuadrado inverso de la distancia:

$$U(r) = -k/r^2 \quad (9)$$

La teoría de la Relatividad General de Einstein incluye en el potencial, realizando una expansión de Taylor de la expresión, términos que dependen inversamente lineal y del cuadrado inverso de la distancia. Todos estos potenciales tienen en común que decrecen con la distancia, abriendo la posibilidad a órbitas abiertas que sean capaces de escapar la influencia gravitatoria del foco.

En el caso del cono de Hooke, sin embargo, el potencia depende linealmente de la distancia:

$$U(r) = -kr \quad (10)$$

Lo que se traduce en una fuerza constante que se aplica independientemente de la distancia respecto al foco, eliminando la posibilidad de órbitas abiertas. Las órbitas resultantes tienen una característica muy importante: la precesión. A diferencia de las órbitas en un potencial kepleriano, estas órbitas no vuelven al punto de partida una vez completada una vuelta en torno al sol, sino que terminan desplazadas cierto ángulo.

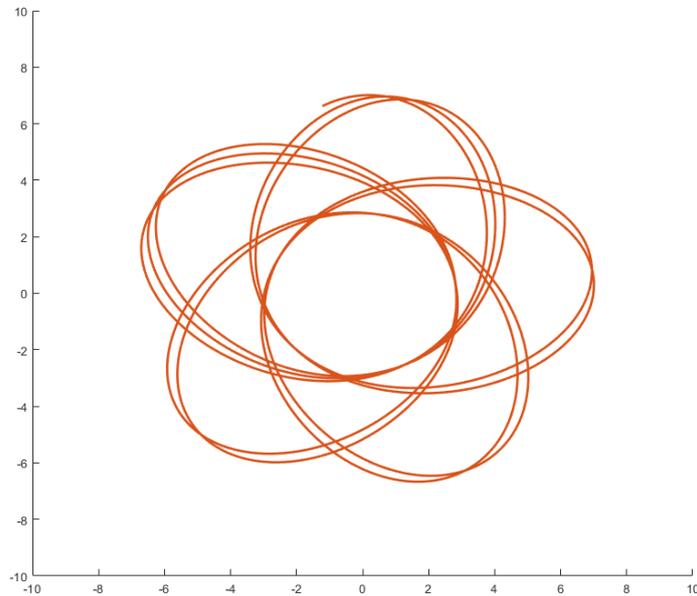


Figura 2: Precesión en órbitas en un cono de Hooke.

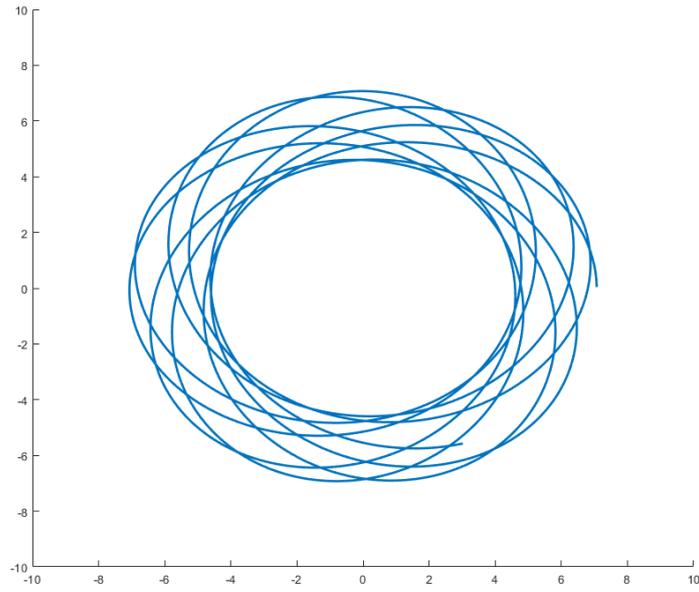


Figura 3: Precesión en órbitas en un cono de Hooke.

3.3. Precesiones

A continuación se realiza un intento de calcular la precesión de la órbitas de una bolita en un cono de Hooke. Si recordamos las ecuaciones del movimiento en cilíndricas, observamos que existen condiciones para las cuales no hay aceleración radial:

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \frac{J}{m\rho^2} \\ \ddot{\rho} &= \rho\dot{\phi}^2 - gc\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}\rho\dot{\phi}^2 - gc &= 0 \\ \rho_0 &= \left(\frac{J^2}{m^2gc}\right)^{1/3}\end{aligned}\tag{12}$$

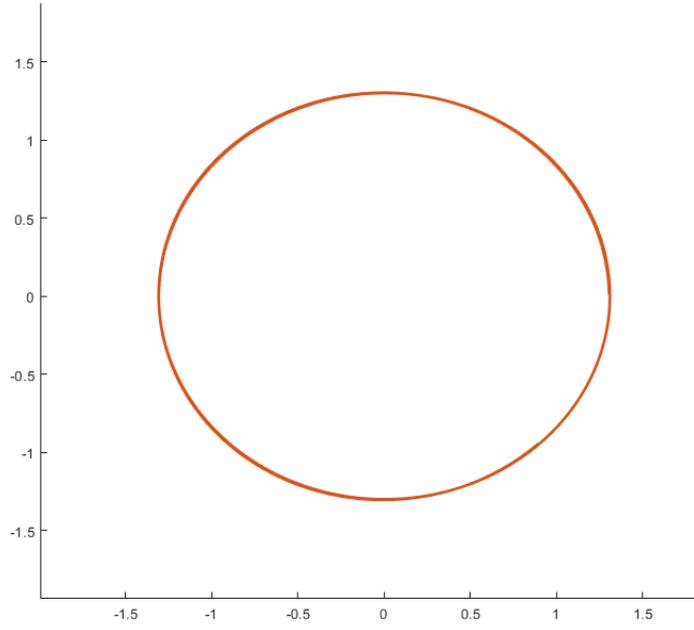


Figura 4: Órbita en un cono de Hooke sin desplazamiento radial.

Las oscilaciones radiales resultantes de perturbar ligeramente una órbita circular (de radio ρ_0) se pueden aproximar a la de un seno o coseno:

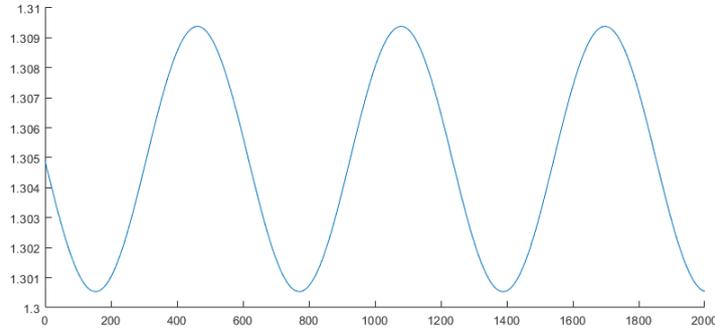


Figura 5: ρ respecto a t para pequeñas oscilaciones radiales.

Si sustituimos la expresión correspondiente a un coseno centrado en ρ_0 de amplitud ϵ en la ecuación de movimiento obtenemos:

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \rho_0 + \epsilon \cos(\omega t) \\ \dot{\rho}(t) &= -\omega \epsilon \sin(\omega t) \\ \ddot{\rho}(t) &= -\omega^2 \epsilon \cos(\omega t)\end{aligned}\tag{13}$$

$$-\omega^2 \epsilon = \frac{J^2}{m^2(\rho_0 + \epsilon)^3} - gc\tag{14}$$

Resolviendo numéricamente ω pude obtener valores concretos para la precesión ν :

$$\nu = \frac{\dot{\phi}}{\omega} * 2\pi\tag{15}$$

4. Anexos

```

1  dr=0;
2  ddr=0;
3  e=0;
4  de=0.0;
5
6  dt=1;
7  t=0:dt:2000;
8  Ro=[];
9  E=[];
10 X=[];
11 Y=[];
12 Z=[];
13 x=[];
14 y=[];
15 z=[];
16 cur=[];
17 ene=[];
18
19 J=0.01;
20 m=1;
21 g=0.0005;
22 o=pi/35;
23 %o=atan(J^2/(m^2*g));
24 c=abs(tan(o));
25 r=1*(J^2/(m^2*g*c))^(1/3);
26
27
28 for i=1:length(t)
29     %ddr=((J^2/(m^2*r^3))-g*c)/(1/(1+c^2))
30     ddr=r*de^2-g*c;
31     dr=dr+ddr;
32     r=r+dr;
33
34     de=J/(m*r^2);
35     e=e+de;
36
37     %Ro=[Ro r];
38     Z=[Z c*r];
39
40     X=[X r*cos(o)];
41     Y=[Y r*sin(o)];
42
43     %ene=[ene m*(dr+dr+r*r*sin(o)*sin(o)*de+de)/2+m*g*r*cos(o)];
44 end
45

```

```

1  import java.util.*;
2  import peasy.PeasyCam;
3  PeasyCam cam;
4
5  float step=1;
6  float o=PI/4;
7  float t, ddr, dr, r, dde, de, e, m, m2;
8  int i;
9  PVector pp[]= new PVector[10000];
10 PVector p= new PVector(200, 0, 200);
11 //PVector v= new PVector(-1, -1, 0);
12 //PVector a= new PVector(0, 0, 0);
13 //PVector temp, vv, aa;
14
15 void setup() {
16     fullScreen(P3D);
17     //translate(width/2, height/2);
18     //cam = new PeasyCam(this, 3000);
19
20     for(int i=0; i<pp.length; i++){
21         pp[i]= new PVector(0, 0, 0);
22     }
23
24     dr=-20;
25     r=500;
26
27     p= new PVector(r*cos(o)*sin(o), r*sin(o)*sin(o), r*cos(o));
28 }
29
30
31 void draw() {
32     t+=1;
33     background(0);
34     m=map(mouseY,height,0,0,PI/2);
35     m2=map(mouseY,height,0,1,0.5);
36     camera(0,3000*sin(m)*m2,3000*cos(m),0,0,750,0,0,-1);
37
38
39     for (float z = 0; z < 1000; z+=50) {
40         beginShape(TRIANGLE_STRIP);
41         for (float o = 0; o <= 2*PI+0.1; o+=0.1) {
42             stroke(255,100);
43             strokeWeight(1);
44             vertex(z*cos(o),z*sin(o),z);
45         }
46         endShape(CLOSE);
47     }
48     stroke(255,0,0);
49     strokeWeight(6);
50
51     pushMatrix();
52     translate(p.x,p.y,p.z);

```

```

46
47 for o=0:0.02:0.3
48     for i=0:0.1:2*pi+0.
49         x=[x o*cos(1)/c];
50         y=[y o*sin(1)/c];
51         z=[z o];
52     end
53 end
54
55 rho=(J^2/(m^2*g*c))^(1/3);
56 %plot3(rho*cos(0:0.1:2*pi),rho*sin(0:0.1:2*pi),c*rho*(0:0.1:2*pi)
57         )./(0:0.1:2*pi));
58
59
60
61 %plot3(x,y,z);
62 % hold on
63 % plot3(X,Y,Z,'LineWidth',2.0);
64 % xlim([-1,1])
65 % ylim([-1,1])
66 % zlim([0,2])
67
68
69
70 hold on
71 %-----
72 ma = max(Z/c);
73 mi = min(Z/c);
74 ep=(ma-mi)/2;
75 phi=J/(m*rho^2);
76 sym= w
77 %eqn = w^2*ep == (rho+ep)*J^2/(m^2*rho^4)-g*c;
78 eqn = -w^2*ep == J^2/(m^2*(rho+ep)^3)-g*c;
79 S = solve(eqn,w)
80 plot(t,Z/c);
81 %fplot(@(t) rho+ep*cos(S(2)*t+pi/2));
82
83 phi*2*pi/S(2)

```

Listing 1: Simulador de un cono de Hooke con cálculo de precesión (Matlab)

```

53 sphere(5);
54 popMatrix();
55
56 beginShape(LINES);
57 for (int o = 0; o < i-1; o+=1) {
58     vertex(pp[o].x,pp[o].y,pp[o].z);
59     vertex(pp[o+1].x,pp[o+1].y,pp[o+1].z);
60     // vertex for lines, point for points
61 }
62 endShape();
63
64 pp[i].add(p);
65
66
67 //a=p.copy();
68 //a.normalize();
69 //a.mult(-1);
70
71 //a=new PVector(p.x,p.y,0);
72 //a.setMag(-v.magSq()/p.z);
73 //println(a);
74
75 //vv=v.copy();
76 //v.add(a);
77 //vv.mult(step);
78 //p.add(vv);
79
80
81
82 float J=10000;
83 float m=1;
84 de=J/(m*r*r*sin(o)*sin(o));
85 println(de);
86 e+=de;
87
88 float g=1;
89 ddr=r*sin(o)*sin(o)*de*de-g*cos(o);
90 dr+=ddr;
91 r+=dr;
92
93
94 p= new PVector(r*cos(o)*sin(o), r*sin(o)*sin(o), r*cos(o));
95
96
97 i++;
98 }

```

Listing 2: Simulador de un cono de Hooke (Processing)